Národní informační středisko pro podporu jakosti

METODA KUMULOVANÝCH SOUČTŮ

C U S U M

metoda: tabulkový (lineární) CUSUM

RNDr. Jiří Michálek, CSc., Ing. Antonie Poskočilová

- Základem SPC jsou Shewhartovy regulační diagramy.

- Hlavní nevýhodou Shewhartových regulačních diagramů je, že využívají informaci o procesu obsaženou pouze v posledním zakresleném bodě.

- Dvě efektivní alternativy Shewhartových regulačních diagramů, užitečné zejména v případech, kdy je třeba detekovat malá posunutí („shifty“) jsou

  regulační diagramy kumulovaných součtů (**CUSUM**)

  a regulační diagramy exponenciálně vážených klouzavých průměrů (**EWMA**).

1. Regulační diagramy kumulovaných součtů - CUSUM

- Cusum regulační diagramy zahrnují všechnu informaci obsaženou v posloupnosti výběrových hodnot do zakreslovaných kumulovaných součtů odchylek výběrových hodnot od cílové hodnoty.

- Je-li μ_0 cílová hodnota pro střední hodnotu procesu, a je-li výběrový průměr j-tého výběru $\bar{x}_j$, potom cusum regulační diagram je tvořen zakreslováním veličin typu

$$C_i = \sum_{j=1}^{i} (\bar{x}_j - \mu_0)$$

- Nechť x_j je j-té pozorování procesu.
- Je-li proces pod kontrolou potom x_j jsou rozdělena $N(\mu, \sigma^2)$.
- Předpokládá se že σ je známá, nebo může být spolehlivě odhadnuta; $\mu = \mu_0$, kde μ_0 je daná cílová hodnota.
- Sečítané odchylky od cílové hodnoty μ_0, které přesahují cílovou hodnotu, se vyjádří jednou statistikou, C^+ .
- Sečítané odchylky od cílové hodnoty μ_0, které jsou pod cílovou hodnotou, se vyjádří druhou statistikou, C^- .
- C^+ a C^- jsou jednostranné, horní a dolní cusumy.

Cusum - diagram pro individuální hodnoty a pro výběrové průměry z normálně rozdělených dat.

Čtení x_i jsou vzájemně nezávislá a identicky rozdělená; řídí se normálním rozdělením $N(\mu,\sigma^2)$; se známou střední hodnotou μ a známou směrodatnou odchylkou σ. Předpokládají se logické podskupiny z tohoto rozdělení stejného rozsahu n.

Kumulovaný součet - **Cusum C_n** je pro **individuální hodnoty** (n = 1) definován

A) na základě původního měřítka (scale) čtení:

$$C_n = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)$$

B) na základě normalizovaných (standardizing) čtení, tak aby střední hodnota byla rovna 0 a směrodatná odchylka rovna1:

$$U_j = (x_j - \mu) / \sigma ,$$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} U_j$$

Cusum C_n je v podstatě cusum S_n vynášený v jednotkách σ - směrodatné odchylky čtení.

Rovnice pro C_n může být napsána v rekurzivním tvaru

$$C_0 = 0 ,$$

$$C_n = C_{n-1} + (x_n - \mu) ;$$

stejně jako pro S_n

$$S_0 = 0 ,$$

$$S_n = S_{n-1} + U_n .$$

Předpokládejme, že pro celé číslo t (v určitém okamžiku), se původní rozdělení sledované náhodné veličiny změní z rozdělení $N(\mu,\sigma^2)$ na rozdělení $N(\mu+\delta , \sigma^2)$. Tj. střední hodnota μ náhodné veličiny bude vystavena změně - **posunu** ("shiftu") **velikosti δ** .

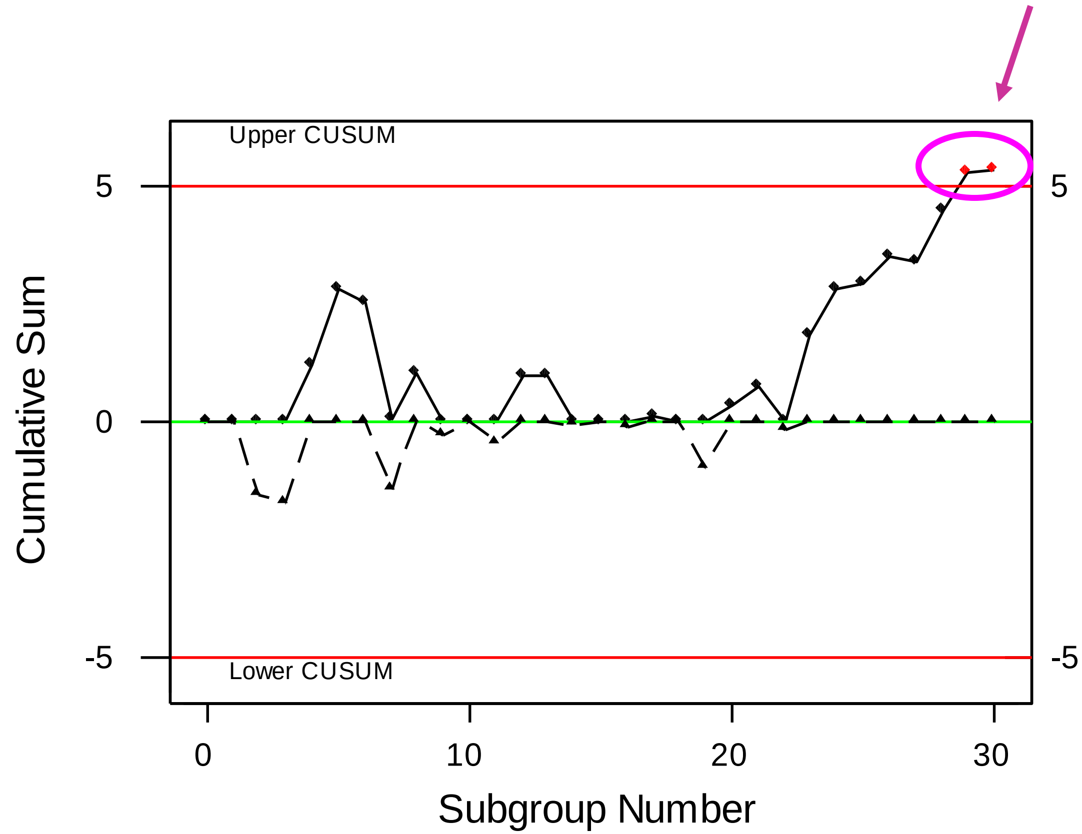
Jinými slovy, střední hodnota cusumu, v čase $t > m$ je $(t-m)\delta$. To znamená, že posun startuje v bodě (m, C_m) a stoupá lineárně se sklonem δ. V principu se střední hodnota může měnit daleko složitějším způsobem; cusum-diagram je schopen detekovat i tyto složitější změny.

Příklad

- μ_0 = 10, n = 1, σ = 1,0
- Máme zájem detekovat posun 1.0σ = 1.0(1.0) = 1.0 (δ = 1,0)
- Střední hodnota procesu, která je již mimo kontrolu: μ_1= 10 + 1 = 11
- K = δ/2 = 1/2   a H = 5σ = 5 (doporučováno)
- Rovnice statistik jsou potom:

$$C_i^+ = \max\left[0, x_i - 10.5 + C_{i-1}^+\right]$$
$$C_i^- = \max\left[0, 10.5 - x_i + C_{i-1}^-\right]$$

CUSUM Chart for x



- Cusum diagram ukazuje na to, že proces je mimo kontrolu.
- Následující krok je najít rozhodující příčinu, přijmout nápravné opatření, a opětovně spustit cusum od nuly.
- Bylo-li provedeno seřízení procesu, může být užitečné odhadnout střední hodnotu procesu způsobenou posunutím (shiftem).

Jsou-li individuální čtení, sledovaná cusum-diagramem, rozdělena normálně $N(\mu, \sigma^2)$, potom výběrové průměry $\bar{x}_j$ podskupin rozsahu m jsou rozděleny rovněž normálně $N(\mu, \sigma^2/m)$.

Cusum C_n je pro **výběrové průměry** $(n > 1)$ definován vztahem

A)

$$C_n = \sum_{j=1}^{n} (\bar{x}_j - \mu)$$

B) resp. normalizovaný $U_j = (\bar{x}_j - \mu) / \sigma_{\bar{x}}$,

a

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} U_j$$

Rozhodovací interval H (decision interval DI)

Pro C_n stejně jako pro S_n je vedle tradičního přístupu pomocí V-masky navržena i forma lineárního (tabulkového) cusumu, pro identifikaci skutečné změny - posunutí (shiftu) - střední hodnoty.

Pro monitorování náhodné veličiny vzhledem ke kladnému (stoupajícímu) posunu (upward shift) střední hodnoty se sleduje kladná veličina

$$C_0^+ = 0 ,$$

$$C_n^+ = \max(0, C_{n-1}^+ + x_n - \mu - K) .$$

stoupající posun je signalizován, když hodnota C_n^+ překročí hodnotu H

$$C_n^+ > H .$$

Pro monitorování náhodné veličiny vzhledem ke klesajícímu (zápornému) posunu (downward shift) střední hodnoty se sleduje záporná veličina

$$C_0^- = 0 ,$$

$$C_n^- = \min(0, C_{n-1}^- + x_n - \mu + K) .$$

klesající posun je signalizován, když hodnota C_n^- klesne pod hodnotu H

$$C_n^- < -H .$$

Referenční hodnota K

- dovolená úchylka - střední hodnoty, která se volí jako polovina mezi cílovou hodnotou $\mu = \mu_0$ a již nepřijatelnou úrovní střední hodnoty $\mu = \mu_1$.

Je-li signál, že došlo k posunu, potom odhad doby t kdy k němu došlo je čas posledního pozorování (bodu), kdy $C_n^+ = 0$, resp. kdy $C_n^- = 0$.

V případě normalizovaných proměnných S_n je situace obdobná: pro monitorování náhodné veličiny vzhledem ke stoupajícímu posunu (upward shift) střední hodnoty se sleduje kladná veličina

$$S_0^+ = 0 ,$$

$$S_n^+ = \max(0, S_{n-1}^+ + U_n - k) .$$

stoupající posun je signalizován, když

$$S_n^+ > h .$$

Pro monitorování náhodné veličiny vzhledem ke klesajícímu posunu (downward shift) střední hodnoty se sleduje záporná veličina

$$S_0^- = 0 ,$$

$$S_n^- = \min(0, S_{n-1}^- + U_n + k) .$$

klesající posun je signalizován, když

$$S_n^- < -h .$$

Je-li signál, že došlo k posunu, potom odhad doby t kdy k němu došlo je poslední pozorování (bod), kdy $S_0^+ = 0$, resp. kdy $S_0^- = 0$.

Volba hodnot parametrů lineárního cusumu K a H

Parametry cusum diagramu

K - referenční hodnota

- dovolená úchylka - volí se jako polovina uvažovaného posunutí mezi cílovou hodnotou $\mu = \mu_0$ a již nepřijatelnou střední hodnotou $\mu = \mu_1$, kterou chceme rychle detekovat. Pokud tuto změnu (posunutí) vyjádříme v jednotkách směrodatné odchylky jako $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$ nebo $\delta = |\mu_1 - \mu_0| / \sigma$, potom K - je polovina velikosti posunutí

$$K = \frac{\delta}{2}\sigma = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}$$

Obvykle se označuje $k = \delta / 2$, potom $K = k\sigma$;

H - rozhodovací interval

- mez, která je-li překročena, tj. je-li $C_n^+ > H$ resp. $C_n^- < -H$ usuzuje se, že došlo v procesu k takové změně - kladnému nebo zápornému posunu - že se proces dostal mimo kontrolu. Za výchozí, odůvodněnou hodnotu H se považuje $\boxed{H = 5\sigma}$. Obvykle se označuje $H = h\,\sigma$. Volba obu parametrů K a H je velmi podstatná. Ovlivňuje charakteristiku cusum diagramu, kterou je

ARL - průměrná délka posloupnosti (average run lenght), průměrný počet výběrů než dojde k překročení rozhodovacího intervalu;

ARL_0 - průměrný počet výběrů, než dojde k překročení rozhodovacího intervalu za předpokladu, že se původní rozdělení nezmění, tj. za předpokladu nulového posunu "shiftu" střední hodnoty $\Delta = 0$ (označuje se také "in-control" ARL) ;

ARL_Δ - průměrný počet výběrů, než dojde k překročení rozhodovacího intervalu za předpokladu, že došlo k posunu střední hodnoty o Δ (označuje se také "out-of-control" ARL)

ARL se měří od počátku, tj. od C_0 resp. S_0 a závisí na velikosti parametrů

k a h (resp. K a H).

Větší hodnota každého z obou parametrů vede k větší hodnotě ARL. V krajním případě, pokud oba parametry k i h jsou rovny 0 , potom ARL je rovno 1 .

Volba parametru k plyne z volby posunu ("shiftu") střední hodnoty procesu, pro kterou je cusum navrhován ($k = \delta / 2$). Druhý parametr - rozhodovací interval h - je obvykle stanoven na základě minimální přijatelné hodnoty ARL_0 ("in-control" ARL).

Pro jakoukoliv zvolenou hodnotu k je nutno nalézt takové h , že ARL_0 bude rovno hodnotě větší než 1 .

Cusum pro výběrové průměry $\bar{x}_j$.

Doposud jsme převážně pracovali s individuálními čteními. Uvažujme nyní podskupiny rozsahu m a z nich vypočítané výběrové průměry $\bar{x}_j$. Potom musíme pracovat se směrodatnou odchylkou výběrových průměrů $\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{m}$.

Posun střední hodnoty Δ se v tomto případě nebude měřit v jednotkách σ ale v jednotkách $\sigma_{\bar{x}}$. Ve výše uvedených vztazích nahradíme individuální pozorování x_i výběrovými průměry $\bar{x}_j$ a směrodatnou odchylku procesu σ směrodatnou odchylkou průměrů podskupin $\sigma_{\bar{x}}$.

Odhad nové střední hodnoty procesu

Dojde-li k posunu je možno odhadnout novou střední hodnotu procesu na základě vztahu:

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \mu_0 + K + \dfrac{C_i^+}{N^+}, & \text{pro} \quad C_i^+ > H \\ \mu_0 - K + \dfrac{C_i^-}{N^-}, & \text{pro} \quad C_i^- < -H \end{cases}$$

kde N^+ a N^- je počet výběrových bodů od okamžiku kdy $C_n^+ = 0$, resp. kdy $C_n^- = 0$.

Doporučení pro navrhování lineárních Cusum diagramů

Lineární cusum-diagram je navržen zvolením referenční hodnoty **K** a rozhodovacím intervalem **H**, kde

$$K = k\sigma \quad \text{a} \quad H = h\sigma,$$

a kde σ je směrodatná odchylka procesu, použitá při navrhování cusum-diagramu.

Použití $h = 4$ nebo $h = 5$ a $k = 1/2$ zajistí cusum s dobrými vlastnostmi ARL, vzhledem k posunutí střední hodnoty procesu o 1σ.

Pro ilustraci, jak dobře pracuje toto doporučení, uvažujme kladné nebo záporné posunutí střední hodnoty δ v násobcích σ.

Odpovídající průměrné délky posloupností vedoucích k překročení rozhodovacího intervalu jsou uvedeny v následující tabulce 1.

Např. posunutí o 1σ bude detekováno v průměru v **8,38** výběrech ($ARL_1 = 8{,}38$) při parametrech $k = 1/2$, $h = 4$ a v **10,4** výběrech ($ARL_1 = 10{,}4$) při parametrech $k = 1/2$, $h = 5$.

Z tabulky 1. rovněž plyne, že při $h = 4$ bude ARL_0 = **168** (tj. bude třeba v průměru 168 výběrů na jeden planý poplach) a při $h = 5$ bude ARL_0 = **465**.

Tabulka 1: Výkony **ARL** pro oboustranný tabulkový cusum
s parametry k = 1/2 a h = 4, nebo h = 5

Posun střední hodnoty v násobcích σ	h = 4	h = 5
0	$\boxed{168}$	$\boxed{465}$
0,25	74,2	139
0,50	26,6	38,0
0,75	13,3	17,0
1,00	$\boxed{8{,}38}$	$\boxed{10{,}4}$
1,50	4,75	5,75
2,00	3,34	4,01
2,50	2,62	3,11
3,00	2,19	2,57
4,00	1,71	2,01

Pro **jednostranný** cusum (tj. C_n^+ nebo C_n^-) s parametry h a k je možno pro výpočet hodnot ARL použít přibližného vztahu

$$ARL = \frac{\exp(-2\Delta b) + 2\Delta b - 1}{2\Delta^2}$$

pro $\Delta \neq 0$, je $\Delta = \delta^* - k$ pro horní jednostrannou mez C_n^+ ;

$\Delta = -\delta^* - k$ pro dolní jednostrannou mez C_n^- ;

$b = h + 1{,}166$;

$\delta^* = (\mu_1 - \mu_0) / \sigma$, $(\mu_1 > \mu_0)$;

pro $\Delta = 0$ lze použít $ARL = b^2$.

Veličina δ^* reprezentuje posunutí střední hodnoty v jednotkách směrodatné odchylky σ , pro které se ARL počítá. Proto je-li $\delta^* = 0$ dostaneme ARL_0 a když $\delta^* \neq 0$ vypočítáme ARL_1 odpovídající posunu velikosti δ^* .

Abychom získali ARL pro **dvoustranný** cusum označíme statistiky ARL^+ a ARL^- pro jednostranný cusum a použijeme vztahu

$$\frac{1}{ARL} = \frac{1}{ARL^+} + \frac{1}{ARL^-}$$

Pro ilustraci:

uvažujme dvoustranný cusum $k = 1/2$, $h = 5$, $\delta^* = 0$, potom $\Delta = \delta^* - k = -1/2$, $b = h + 1{,}166 = 6{,}166$ a po dosazení do rovnice pro ARL dostaneme

$ARL_0^+ \cong 938{,}2$; vzhledem k symetrii je i $ARL_0^- \cong 938{,}2$.

Potom s využitím poslední uvedené rovnice dostaneme $ARL_0 = 469{,}1$, což je blízko hodnoty 465 uvedené v tabulce 1.

Ilustrační příklady použití metody CUSUM - tabulková forma

Příklad 1 Bylo naměřeno celkem 41 individuálních hodnot znaku jakosti - pevnosti v tahu Rm (MPa).

Cílová hodnota pro CuSum $\boldsymbol{\mu_0}$ **= 380** MPa, směrodatná odchylka se v čase mění jen minimálně, proto je možno použít odhadu ze všech i dříve napozorovaných hodnot $\boldsymbol{\sigma}$ **= 3** MPa.

Bylo zvoleno $\boldsymbol{\delta}$ **= 1,0** (za významné se považuje posunutí úrovně procesu o 1σ, tj. o 3 MPa směrem k nižším hodnotám MPa), potom

$\mu_{-1} = \mu_0 - \sigma\delta = 380 - 3 = 377$ a $\mu_1 = \mu_0 + \sigma\delta = 380 + 3 = 383$.

Úkolem je stanovit parametry oboustranného regulačního diagramu CuSum pro individuální hodnoty:

k $= \delta / 2 = 0{,}5$ ($K = k\ s = 1{,}5$) a volíme **h** $= 5$ ($H = hs = 15$)

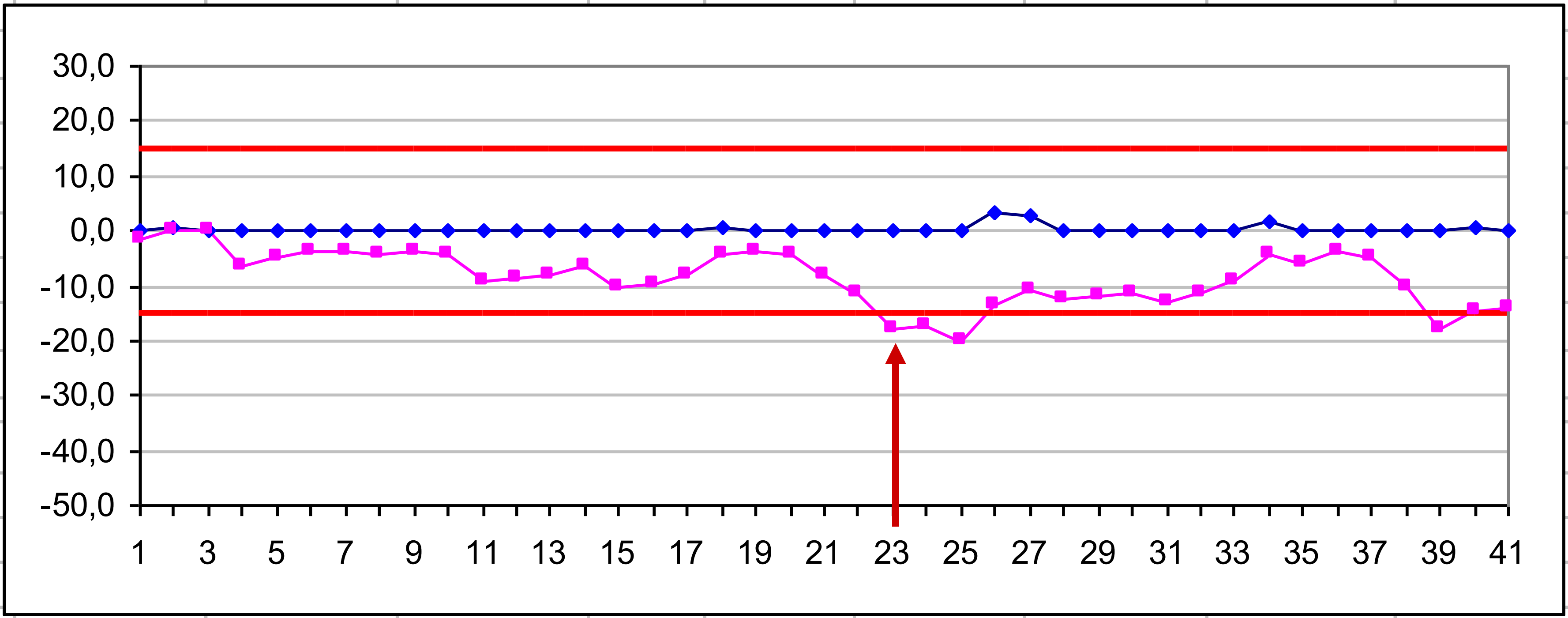
Záznam dat pro výpočet "tabulkového" cusumu, v případě podskupin velikosti n = 1

j	x_j	Kl. R2
1	377,00	#
2	382,00	5,00
3	379,00	3,00
4	372,00	7,00
5	380,00	8,00
6	380,00	0,00
7	378,00	2,00
8	378,00	0,00
9	379,00	1,00
10	378,00	1,00
11	374,00	4,00
12	379,00	5,00
13	379,00	0,00
14	380,00	1,00
15	375,00	5,00
16	379,00	4,00
17	380,00	1,00
18	382,00	2,00
19	379,00	3,00
20	378,00	1,00
21	375,00	3,00
22	375,00	0,00
23	372,00	3,00
24	379,00	7,00
25	376,00	3,00
26	385,00	9,00
27	381,00	4,00
28	377,00	4,00
29	379,00	2,00
30	379,00	0,00

	USL =	**390,00**
	LSL =	**370,00**
Výběrové statistiky:		
počet (rozsah výběru)	n =	41
výběrový průměr	x bar =	378,220
výběrová směrodatná odchylka	s tot =	3,0620
průměrné klouzavé rozpětí	R bar =	3,250
sm. odchylka odhadnutá z klouzavého rozpětí	s_R =	2,8812
maximální pozorování	x_{max} =	385,00
minimální pozorování	x_{min} =	371,00
Koeficienty způsobilosti	Cp =	1,157
	CpU =	1,363
	CpL =	0,951
Koeficienty výkonnosti	Pp =	1,089
	PpU =	1,282
	PpL =	0,895

n = 1	target m_0 =	380	posun δ =	1
	sm.od. s =	3	**k =**	0,50
			K = ks =	1,50
	mimo	383		
		377	**h =**	5
			H = hs =	15

i	x_i	$x_i - (m_0+K)$	C_i^+	N^+	H	$x_i - (m_0-K)$	C_i^-	N^-	-H
			0				0		
1	377,00	-4,50	0,00	0	15	-1,50	-1,50	1	-15
2	382,00	0,50	0,50	1	15	3,50	0,00	0	-15
3	379,00	-2,50	0,00	0	15	0,50	0,00	0	-15
4	372,00	-9,50	0,00	0	15	-6,50	-6,50	1	-15
5	380,00	-1,50	0,00	0	15	1,50	-5,00	2	-15
6	380,00	-1,50	0,00	0	15	1,50	-3,50	3	-15
7	378,00	-3,50	0,00	0	15	-0,50	-4,00	4	-15
8	378,00	-3,50	0,00	0	15	-0,50	-4,50	5	-15
9	379,00	-2,50	0,00	0	15	0,50	-4,00	6	-15
10	378,00	-3,50	0,00	0	15	-0,50	-4,50	7	-15
11	374,00	-7,50	0,00	0	15	-4,50	-9,00	8	-15
12	379,00	-2,50	0,00	0	15	0,50	-8,50	9	-15
13	379,00	-2,50	0,00	0	15	0,50	-8,00	10	-15
14	380,00	-1,50	0,00	0	15	1,50	-6,50	11	-15
15	375,00	-6,50	0,00	0	15	-3,50	-10,00	12	-15
16	379,00	-2,50	0,00	0	15	0,50	-9,50	13	-15
17	380,00	-1,50	0,00	0	15	1,50	-8,00	14	-15
18	382,00	0,50	0,50	1	15	3,50	-4,50	15	-15
19	379,00	-2,50	0,00	0	15	0,50	-4,00	16	-15
20	378,00	-3,50	0,00	0	15	-0,50	-4,50	17	-15
21	375,00	-6,50	0,00	0	15	-3,50	-8,00	18	-15
22	375,00	-6,50	0,00	0	15	-3,50	-11,50	19	-15
23	372,00	-9,50	0,00	0	15	-6,50	-18,00	20	-15



Odhad nové střední hodnoty procesu

$$\hat{\mu} = \mu_0 - K + \frac{C_{23}^-}{N^-} =$$ **377,600**

						jednostr.	jednostr.	oboustr.
Výpočet ARL+, AR- (jednostr.)			d	D+ = d-k	D- = -d-k	ARL+	ARL-	ARL
a ARL (oboustr.)								
			-5	-5,50	4,50	500000,00	1,35	1,35
ARL+ = ARL- =			-4,5	-5,00	4,00	500000,00	1,51	1,51
			-4	-4,50	3,50	500000,00	1,72	1,72
$= \frac{\exp(-2\Delta b) + 2\Delta b - 1}{2\Delta^2}$			-3,5	-4,00	3,00	500000,00	2,00	2,00
			-3	-3,50	2,50	500000,00	2,39	2,39
b =	h+1,166 =	6,166	-2,5	-3,00	2,00	500000,00	2,96	2,96
			-2	-2,50	1,50	500000,00	3,89	3,89
ARL =			-1,5	-2,00	1,00	500000,00	5,67	5,67
=	1/((1/ARL+)+(1/ARL-))		-1	-1,50	0,50	500000,00	10,34	10,34
			-0,5	-1,00	0,00	113413,31	38,02	38,01
			0	-0,50	-0,50	938,22	938,22	469,11
			0,5	0,00	-1,00	38,02	113413,31	38,01
			1	0,50	-1,50	10,34	5000000,00	10,34
			1,5	1,00	-2,00	5,67	5000000,00	5,67
			2	1,50	-2,50	3,89	5000000,00	3,89
			2,5	2,00	-3,00	2,96	5000000,00	2,96
			3	2,50	-3,50	2,39	5000000,00	2,39
			3,5	3,00	-4,00	2,00	5000000,00	2,00
			4	3,50	-4,50	1,72	5000000,00	1,72
			4,5	4,00	-5,00	1,51	5000000,00	1,51
			5	4,50	-5,50	1,35	5000000,00	1,35

Příklad 2 Bylo naměřeno celkem 43 podskupin rozsahu m = 4 hodnot sledovaného znaku jakosti.

Cílová hodnota pro CuSum $\boldsymbol{\mu_0 = 12}$, směrodatná odchylka se v čase mění jen minimálně, proto je možno použít odhadu ze všech i dříve napozorovaných hodnot $\boldsymbol{\sigma = 1{,}1}$. Tomu odpovídá směrodatná odchylka výběrových průměrů podskupin **0,491935**.

Bylo zvoleno $\boldsymbol{\delta = 3{,}0}$ (za významné se považuje posunutí úrovně procesu o 3 směrodatné odchylky výběrových průměrů).

Úkolem je stanovit parametry oboustranného regulačního diagramu CuSum pro individuální hodnoty:

k = δ / 2 = 1,5 (K = k s = 0,7379) a volíme **h** = 5 (H = hs = 2,4597)

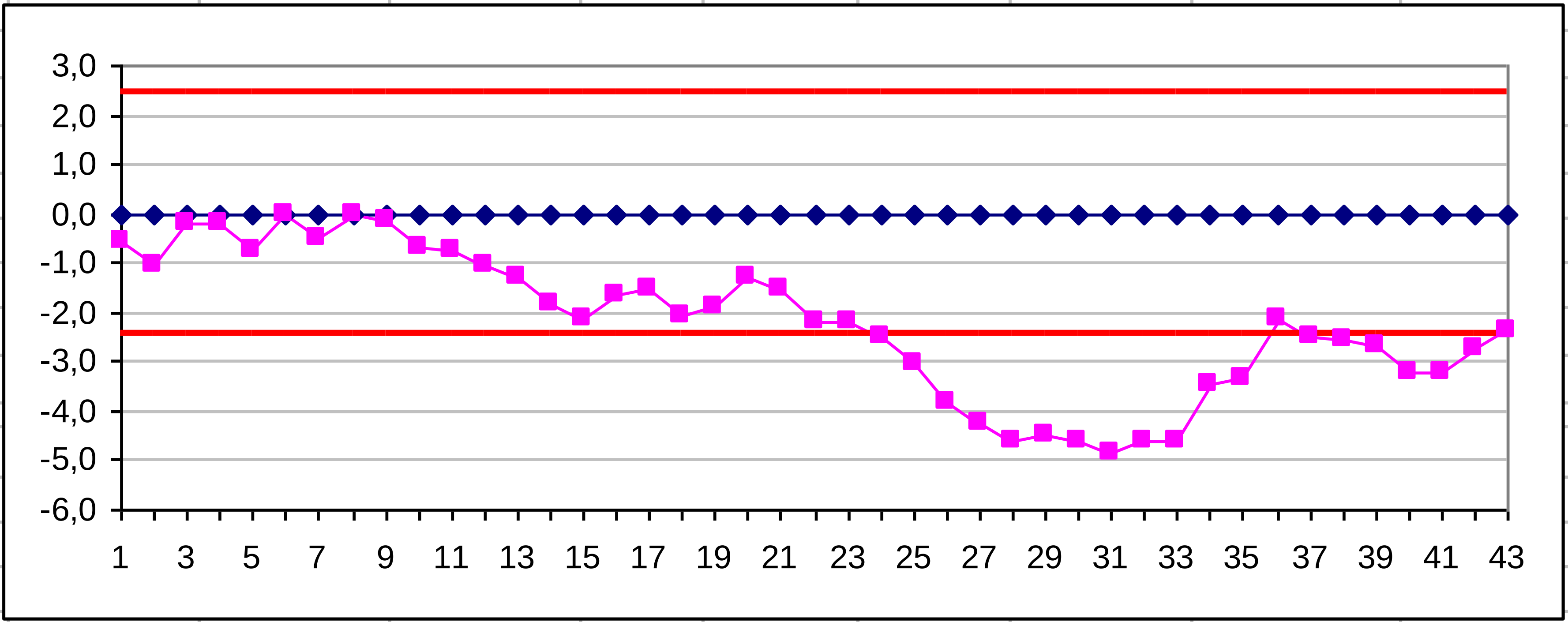
Záznam dat pro výpočet "tabulkového" cusumu, v případě podskupin velkosti n > 1

j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x bar	s
1	10,6	10,4	10,7	11,1							10,700	0,29439
2	11,0	10,5	11,2	10,5							10,800	0,35590
3	12,8	11,8	12,1	11,6							12,075	0,52520
4	11,4	11,2	11,2	11,3							11,275	0,09574
5	10,9	10,0	11,1	10,8							10,700	0,48305
6	12,5	12,0	11,5	11,9							11,975	0,41130
7	10,7	10,8	11,0	10,8							10,825	0,12583
8	11,8	11,9	11,8	11,7							11,800	0,08165
9	11,2	11,3	11,0	11,1							11,150	0,12910
10	10,7	10,6	10,8	10,6							10,675	0,09574
11	11,3	10,7	11,2	11,6							11,200	0,37417
12	11,2	11,1	10,9	10,8							11,000	0,18257
13	10,5	10,6	11,8	11,1							11,000	0,59442
14	10,4	10,9	11,0	10,5							10,700	0,29439
15	10,9	11,0	10,9	11,0							10,950	0,05774
16	11,4	11,7	12,4	11,5							11,750	0,45092
17	11,2	11,5	11,8	11,2							11,425	0,28723
18	10,7	10,6	10,7	10,8							10,700	0,08165
19	11,6	11,2	11,5	11,4							11,425	0,17078
20	12,0	11,6	11,7	12,2							11,875	0,27538
21	11,1	10,3	11,4	11,2							11,000	0,48305
22	10,4	10,6	10,8	10,8							10,650	0,19149
23	11,3	11,1	11,2	11,3							11,225	0,09574
24	10,9	11,0	11,0	11,1							11,000	0,08165
25	10,4	10,3	10,7	11,3							10,675	0,45000
26	10,4	10,5	10,6	10,4							10,475	0,09574
27	11,1	11,1	10,8	10,4							10,850	0,33166
28	11,0	10,9	10,9	10,9							10,925	0,05000
29	11,0	11,1	11,7	11,6							11,350	0,35119
30	11,5	11,3	10,7	11,1							11,150	0,34157

	USL =	**15**
	LSL =	**10**
Výběrové statistiky:		
celokový počet (rozsah všech podskupin)	N =	172
rozsah podskupin	n =	4
počet podskupin	k =	43
celková max. hodnota	max =	12,80
celková min. hodnota	min =	10,00
celkový výběrový průměr	x bar tot =	11,2087
celková výběrová směrodatná odchylka	s tot =	0,54546
max. výběrový průměr	max x bar =	12,475
min. výběrový průměr	min x bar =	10,475
průměr výběrových průměrů podskupin	x bar bar =	11,2087
směrodatná odchylka výběrových průměrů	s xbar =	0,48507
max. výběrová směrodatná odchylka	max s =	0,59442
min. výběrová směrodatná odchylka	min s =	0,00000
průměrná výběrová směrodatná odchylka	s bar =	0,25647
směrodatná odchylka výběrových směrodatných odchylek	s s =	0,15072
směrodatná odchylka odhadnutá z průměrné směrodatné odchylky	s bar / C4	0,27838
Koeficienty způsobilosti	Cp =	2,994
	CpU =	4,540
	CpL =	1,447
Koeficienty výkonnosti	Pp =	1,528
	PpU =	2,317
	PpL =	0,739

n > 1	n =	5		posun d =	3
	target m_0 =	12		**k =**	1,50
	sm.od. s =	1,1		**K = ks =**	0,74
	s.o.x bar =	0,49193			
				h =	5
	mimo	13,48	10,52	**H = hs =**	2,460

i	x_i	x_i - (m_0+K)	C_i^+	N^+	H	x_i - (m_0-K)	C_i^-	N^-	-H
			0				0		
1	10,70	-2,04	0,00	0	2,46	-0,56	-0,56	1	-2,46
2	10,80	-1,94	0,00	0	2,46	-0,46	-1,02	2	-2,46
3	12,08	-0,66	0,00	0	2,46	0,81	-0,21	3	-2,46
4	11,28	-1,46	0,00	0	2,46	0,01	-0,20	4	-2,46
5	10,70	-2,04	0,00	0	2,46	-0,56	-0,76	5	-2,46
6	11,98	-0,76	0,00	0	2,46	0,71	-0,05	6	-2,46
7	10,83	-1,91	0,00	0	2,46	-0,44	-0,48	7	-2,46
8	11,80	-0,94	0,00	0	2,46	0,54	0,00	0	-2,46
9	11,15	-1,59	0,00	0	2,46	-0,11	-0,11	1	-2,46
10	10,68	-2,06	0,00	0	2,46	-0,59	-0,70	2	-2,46
11	11,20	-1,54	0,00	0	2,46	-0,06	-0,76	3	-2,46
12	11,00	-1,74	0,00	0	2,46	-0,26	-1,02	4	-2,46
13	11,00	-1,74	0,00	0	2,46	-0,26	-1,29	5	-2,46
14	10,70	-2,04	0,00	0	2,46	-0,56	-1,85	6	-2,46
15	10,95	-1,79	0,00	0	2,46	-0,31	-2,16	7	-2,46
16	11,75	-0,99	0,00	0	2,46	0,49	-1,67	8	-2,46
17	11,43	-1,31	0,00	0	2,46	0,16	-1,51	9	-2,46
18	10,70	-2,04	0,00	0	2,46	-0,56	-2,07	10	-2,46
19	11,43	-1,31	0,00	0	2,46	0,16	-1,91	11	-2,46
20	11,88	-0,86	0,00	0	2,46	0,61	-1,30	12	-2,46
21	11,00	-1,74	0,00	0	2,46	-0,26	-1,56	13	-2,46
22	10,65	-2,09	0,00	0	2,46	-0,61	-2,17	14	-2,46
23	11,23	-1,51	0,00	0	2,46	-0,04	-2,21	15	-2,46
24	11,00	-1,74	0,00	0	2,46	-0,26	-2,47	16	-2,46
25	10,68	-2,06	0,00	0	2,46	-0,59	-3,06	17	-2,46
26	10,48	-2,26	0,00	0	2,46	-0,79	-3,84	18	-2,46
27	10,85	-1,89	0,00	0	2,46	-0,41	-4,25	19	-2,46



Odhad nové střední hodnoty procesu

$$\hat{\mu} = \mu_0 + K + \frac{C_{24}^{+}}{N^{+}} =$$ **11,108**

			d	D+ = d-k	D- = -d-k	jednostr. ARL+	jednostr. ARL-	oboustr. ARL
Výpočet ARL+, ARL-(jednostr.)								
	a ARL (oboustr.)							
			-5	-6,50	3,50	500000,00	1,72	1,72
ARL+ = ARL- =			-4,5	-6,00	3,00	500000,00	2,00	2,00
			-4	-5,50	2,50	500000,00	2,39	2,39
	$= \dfrac{\exp(-2\Delta b) + 2\Delta b - 1}{2\Delta^2}$		-3,5	-5,00	2,00	500000,00	2,96	2,96
			-3	-4,50	1,50	500000,00	3,89	3,89
b =	h+1,166 =	6,166	-2,5	-4,00	1,00	500000,00	5,67	5,67
			-2	-3,50	0,50	500000,00	10,34	10,34
ARL =			-1,5	-3,00	0,00	500000,00	38,02	38,02
=	1/((1/ARL+)+(1/ARL-))		-1	-2,50	-0,50	500000,00	938,22	936,47
			-0,5	-2,00	-1,00	500000,00	113413,31	92444,45
			0	-1,50	-1,50	500000,00	5000000,00	454545,45
			0,5	-1,00	-2,00	113413,31	5000000,00	110897,85
			1	-0,50	-2,50	938,22	5000000,00	938,05
			1,5	0,00	-3,00	38,02	5000000,00	38,02
			2	0,50	-3,50	10,34	5000000,00	10,34
			2,5	1,00	-4,00	5,67	5000000,00	5,67
			3	1,50	-4,50	3,89	5000000,00	3,89
			3,5	2,00	-5,00	2,96	5000000,00	2,96
			4	2,50	-5,50	2,39	5000000,00	2,39
			4,5	3,00	-6,00	2,00	5000000,00	2,00
			5	3,50	-6,50	1,72	5000000,00	1,72

Porovnání CuSum a Shewhartových RD

Citlivost CuSum diagramů na malé posuny v procesu

Příklad 1

Záznam dat pro výpočet "tabulkového" cusumu, v případě podskupin velkosti n = 1

j	x_j	Kl. R2
1	93	#
2	90	3,00
3	102	12,00
4	51	51,00
5	36	15,00
6	36	0,00
7	99	63,00
8	69	30,00
9	84	15,00
10	93	9,00
11	63	30,00
12	33	30,00
13	53	20,00
14	52	1,00
15	72	20,00
16	48	24,00
17	72	24,00
18	36	36,00
19	55	19,00
20	138	83,00
21	102	36,00
22	90	12,00
23	75	15,00
24	72	3,00
25	93	21,00
26	125	32,00
27	126	1,00
28	126	0,00
29	78	48,00
30	120	42,00
31	111	9,00

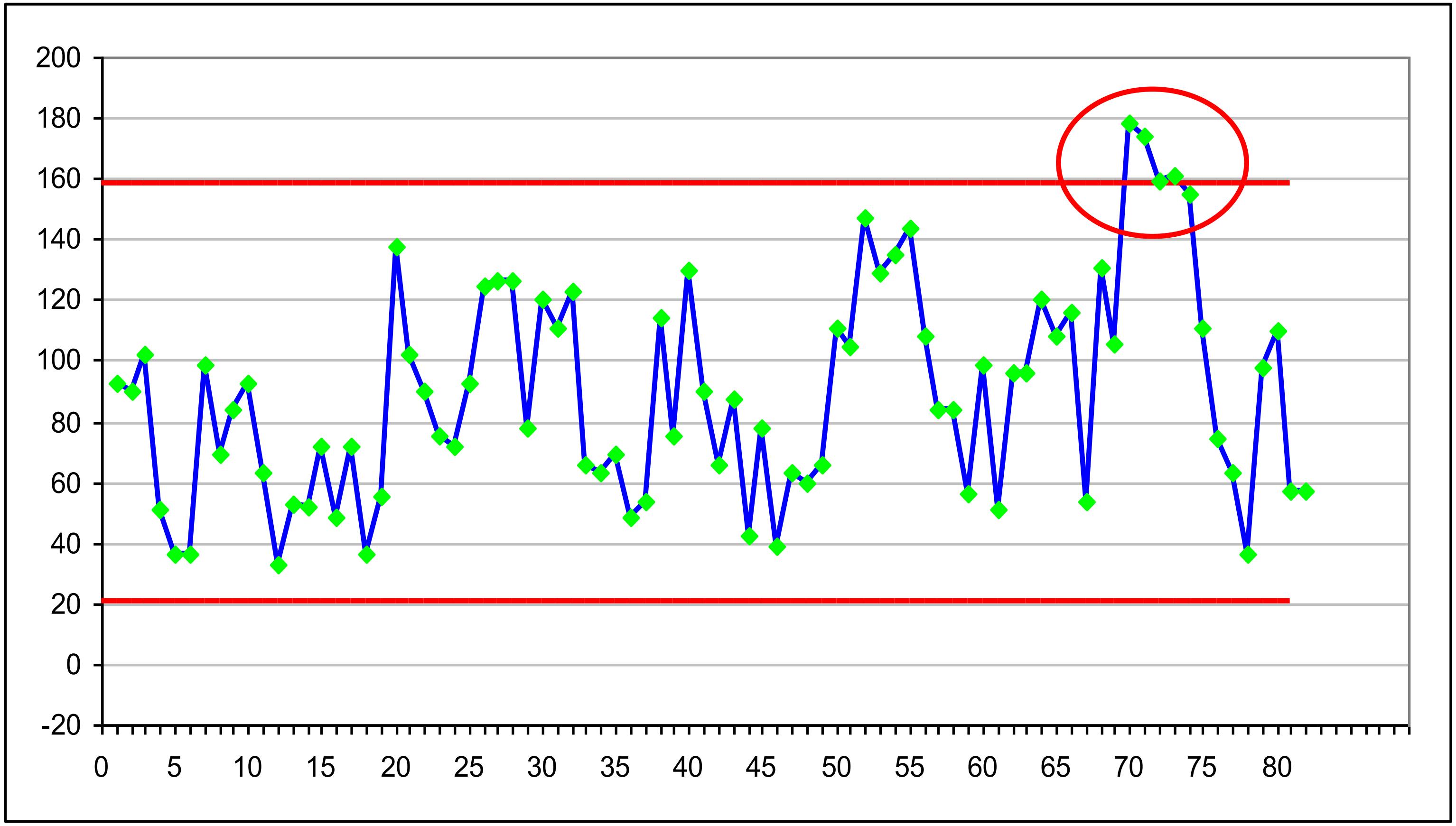
Max =	178,00
Min =	33,00

USL =	**200,00**
LSL =	**20,00**

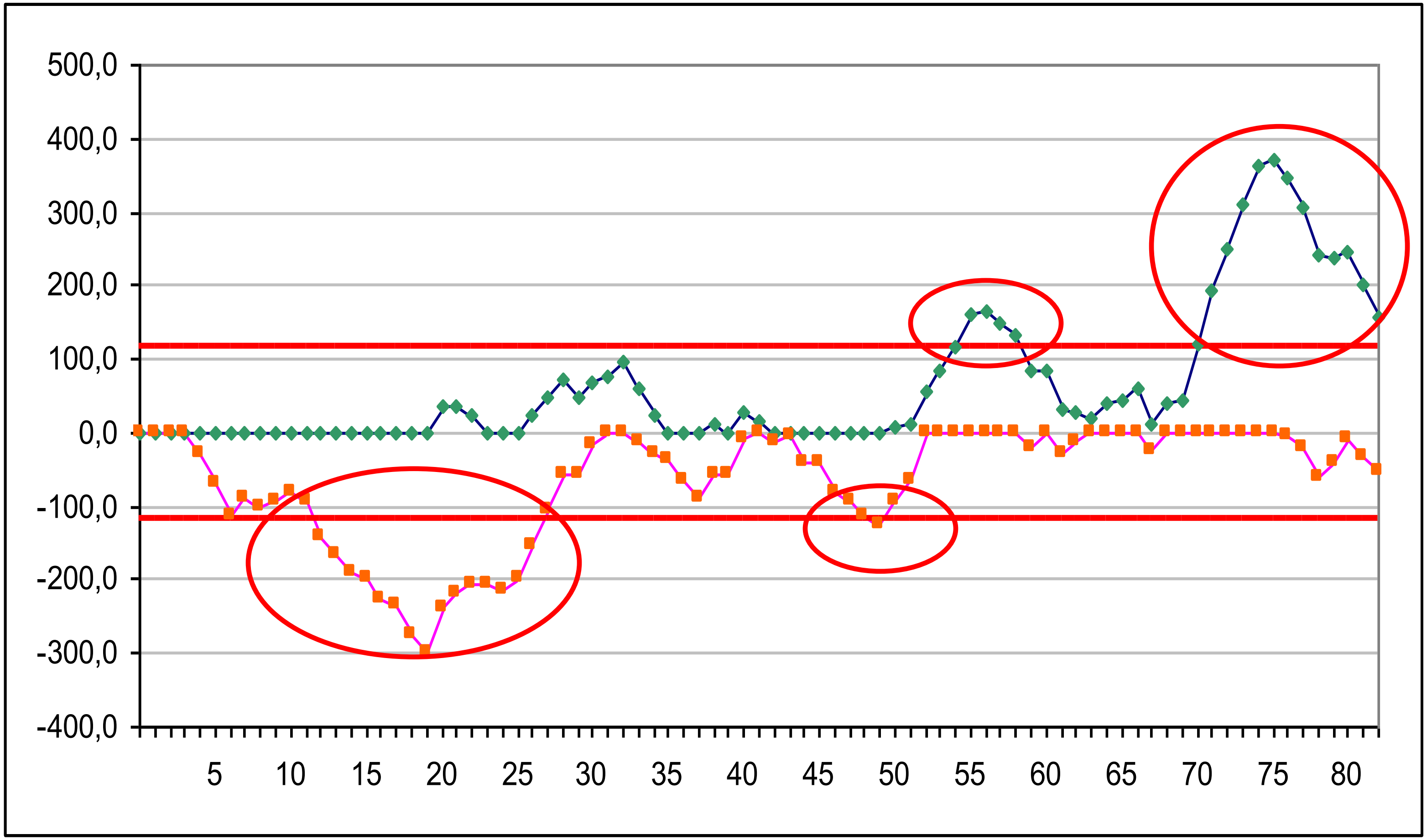
Výběrové statistiky:

počet (rozsah výběru)	n =	82
výběrový průměr	x bar =	89,500
výběrová směrodatná odchylka	s tot =	35,2043
průměrné klouzavé rozpětí	R bar =	25,975
sm. odchylka odhadnutá z klouzavého rozpětí	s_R =	23,0278
maximální pozorování	x_{max} =	178,00
minimální pozorování	x_{min} =	33,00
Koeficienty způsobilosti	Cp =	1,303
	CpU =	1,600
	CpL =	1,006
Koeficienty výkonnosti	Pp =	0,852
	PpU =	1,046
	PpL =	0,658

Shewhartův diagram



CuSum diagram



$d^* = (\mu_1 - \mu_0) / \sigma$

Výpočet ARL^+, ARL^- (jednostr.)
a ARL (oboustr.)

$ARL^+ = ARL^- =$

$$= \frac{\exp(-2\Delta b) + 2\Delta b - 1}{2\Delta^2}$$

b = h+1,166 = 6,166

ARL =

$= 1/((1/ARL^+)+(1/ARL^-))$

d*	$D^+ = d^*-k$	$D^- = -d^*-k$	jednostr. ARL^+	jednostr. ARL^-	oboustr. ARL
-5	-5,50	4,50	500000,00	1,35	1,35
-4,5	-5,00	4,00	500000,00	1,51	1,51
-4	-4,50	3,50	500000,00	1,72	1,72
-3,5	-4,00	3,00	500000,00	2,00	2,00
-3	-3,50	2,50	500000,00	2,39	2,39
-2,5	-3,00	2,00	500000,00	2,96	2,96
-2	-2,50	1,50	500000,00	3,89	3,89
-1,5	-2,00	1,00	500000,00	5,67	5,67
-1	-1,50	0,50	500000,00	10,34	10,34
-0,5	-1,00	0,00	113413,31	38,02	38,01
0	-0,50	-0,50	938,22	938,22	469,11
0,5	0,00	-1,00	38,02	113413,31	38,01
1	0,50	-1,50	10,34	5000000,00	10,34
1,5	1,00	-2,00	5,67	5000000,00	5,67
2	1,50	-2,50	3,89	5000000,00	3,89
2,5	2,00	-3,00	2,96	5000000,00	2,96
3	2,50	-3,50	2,39	5000000,00	2,39
3,5	3,00	-4,00	2,00	5000000,00	2,00
4	3,50	-4,50	1,72	5000000,00	1,72
4,5	4,00	-5,00	1,51	5000000,00	1,51
5	4,50	-5,50	1,35	5000000,00	1,35

Uvedený příklad názorně ukazuje citlivost CuSum v porovnání se Shewhartovým regulačním diagramem pro výběrové průměry.

Vychýlení polohy procesu směrem k nižším hodnotám okolo podskupiny 20 detekuje CuSum diagram, zatím co Shewhartův klasický regulační diagram na tento posun nereaguje.

Rovněž tak nereaguje na posun směrem k vyšším hodnotám okolo podskupiny 56. Reaguje až na značný posun počínaje podskupinou 70.

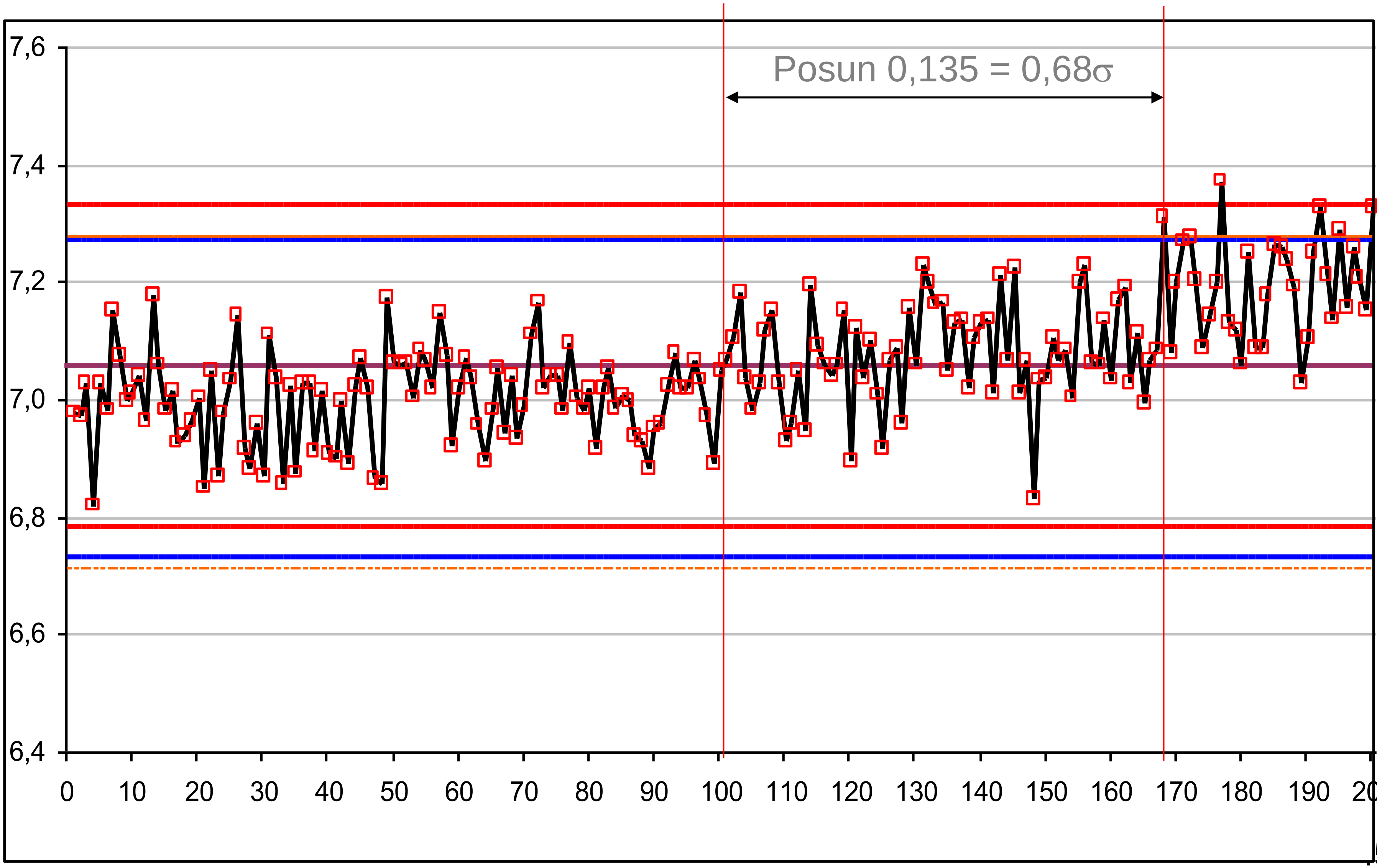
Příklad 2

Uvažujme případ procesu s rozdělením N(7; $0,2^2$), kdy po podskupině 100 dojde k postupnému nárůstu střední hodnoty procesu o 0,002 za jeden kontrolní interval.

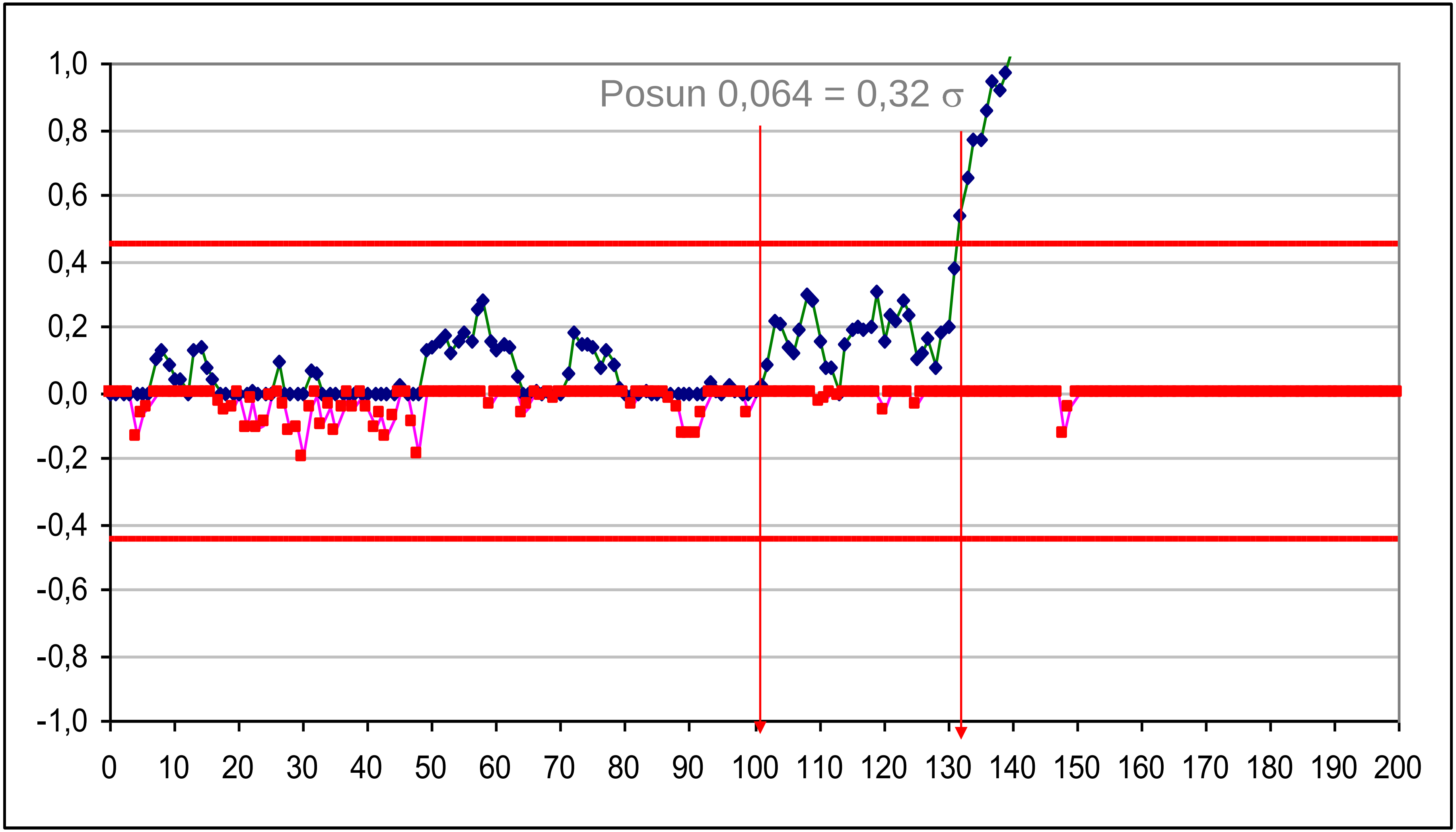
Porovnáme citlivost Shewhartova regulačního diagramu, když zkladní hodnoty odpovídají Pp = Ppk = 1,33, s regulačními mezemi vypočítanými z:

- všech podskupin (červeně)
- prvních 100 podskupin (oranžově)

Shewhartův regulační diagram



CuSum regulační diagram



Hodnoty ARL

			jednostr.	jednostr.	oboustr.
d	$D^+ = d-k$	$D^- = -d-k$	ARL^+	ARL^-	ARL
-5	-5,50	4,50	500000,00	1,35	1,35
-4,5	-5,00	4,00	500000,00	1,51	1,51
-4	-4,50	3,50	500000,00	1,72	1,72
-3,5	-4,00	3,00	500000,00	2,00	2,00
-3	-3,50	2,50	500000,00	2,39	2,39
-2,5	-3,00	2,00	500000,00	2,96	2,96
-2	-2,50	1,50	500000,00	3,89	3,89
-1,5	-2,00	1,00	500000,00	5,67	5,67
-1	-1,50	0,50	500000,00	10,34	10,34
-0,5	-1,00	0,00	113413,31	38,02	38,01
0	-0,50	-0,50	938,22	938,22	469,11
0,5	0,00	-1,00	38,02	113413,31	38,01
1	0,50	-1,50	10,34	5000000,00	10,34
1,5	1,00	-2,00	5,67	5000000,00	5,67
2	1,50	-2,50	3,89	5000000,00	3,89
2,5	2,00	-3,00	2,96	5000000,00	2,96
3	2,50	-3,50	2,39	5000000,00	2,39
3,5	3,00	-4,00	2,00	5000000,00	2,00
4	3,50	-4,50	1,72	5000000,00	1,72
4,5	4,00	-5,00	1,51	5000000,00	1,51
5	4,50	-5,50	1,35	5000000,00	1,35

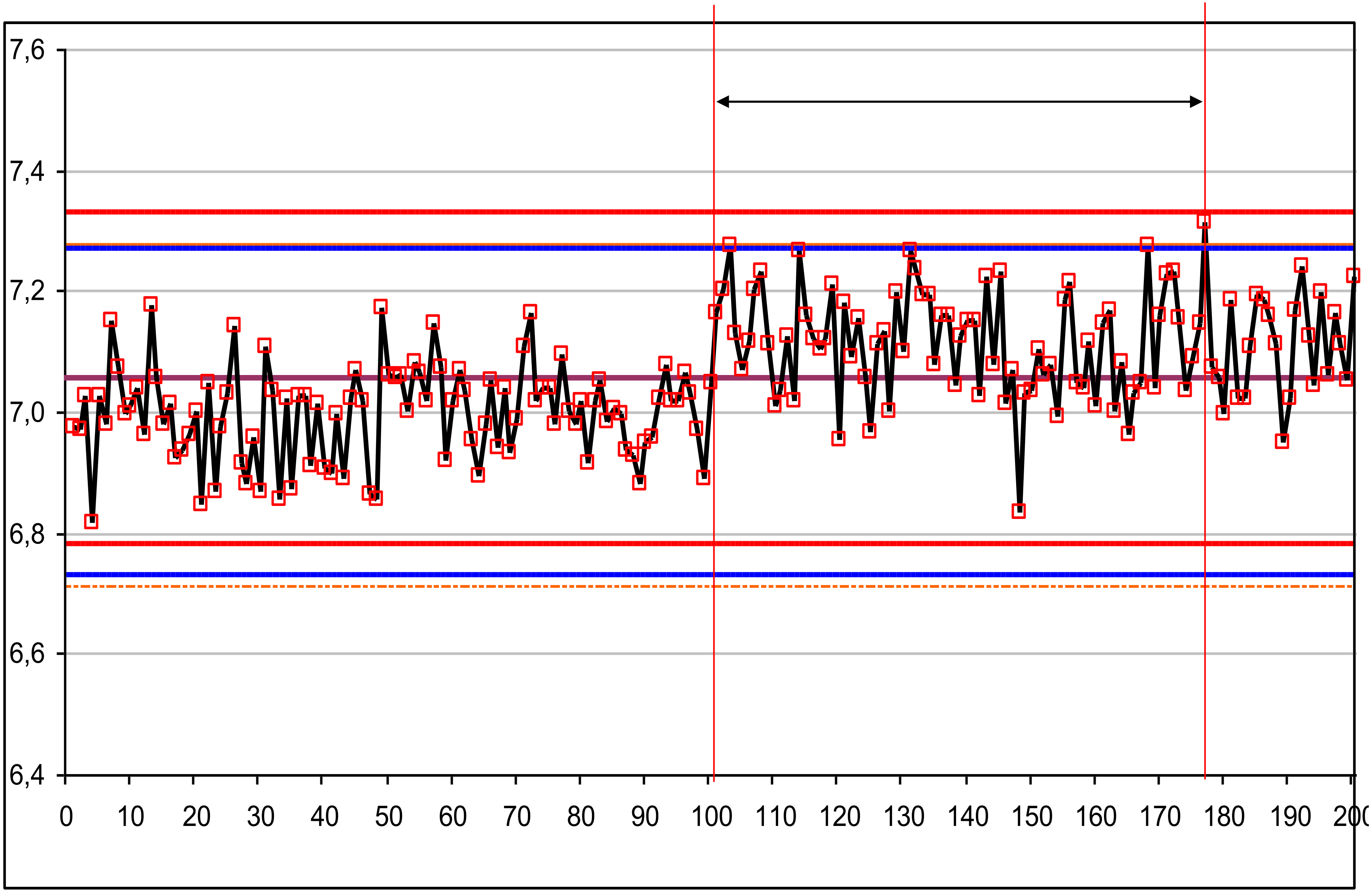
Příklad 3

Uvažujme případ procesu s rozdělením $N(7; 0{,}2^2)$, kdy po podskupině 100 dojde k posunu střední hodnoty procesu o 0,1 (tj. o 0,5 σ)

Porovnáme citlivost Shewhartova regulačního diagramu, když zkladní hodnoty odpovídají Pp=Ppk=1,33, s regulačními mezemi vypočítanými:

- ze všech podskupin (červeně)
- z prvních 100 podskupin (oranžově)

Shewhartův regulační diagram



CuSum regulační diagram